物性研究 53－6(1990－3)

熱力学カップリングの応用：対流系

東邦大 薬　高山光男

(1989年 6月 16日受理)

要旨

空間パターンを示す Bénard 対流系を熱力学カップリングのある系として扱った。自由対流は静止対流と Bénard 対流の場合に分けられ、それぞれについて散逸関数を定式化した。静止対流は大域的な静止流体として扱うことができるが、Bénard 対流は本質的に熱力学カップリングのある系として、すでにモデル系の考察から得ているのと同様の熱力学カップリングの特徴を示した。[7,8]

1．序

液体や気体の流れによって生じる熱輸送（エンタルピー輸送）を一般に対流と呼ぶ。対流は、重力と温度勾配の作用が流体中に不安定な密度差を生じさせることによって起こる自由対流（自然対流とも呼ぶ）と強制的な流れによる強制対流とに分けて考えることができる。物理的に興味あるのは自由対流で、しばしば空間パターンを示す熱・流体力学系あるいは非平衡相転移を起こす系として興味を持たれている。[1,2] さらに熱平衡から遠い非平衡系として、非平衡熱力学を流体力学系に拡張するための具体例として取り上げられている。[3-5]

自由対流に属するいわゆる Bénard 対流系におけるような空間パターンの生成原理は興味深いものであるが、一方で熱伝導と対流運動とのカップリングの問題も重要である。これは、一般には不可逆過程間のカップリング問題として取り扱うべきであろうが、従来の Onsager の相反定理に従うようなカップリング現象とは本質的に違っているように思われる。その特徴は新たなエネルギー散逸の機構の出現にあるということができる。このよう

Mitsuo TAKAYAMA

ないわゆる非平衡性の出現は決してそれ自身で自発的に起こることはない。こうした現象は熱力学カップリングの取り扱いの対象となる可能性を持っている。熱力学カップリングは、それ自身では自発的に進まない過程（coupled過程）が自発的に進む別の過程（coupling過程）によって駆動されることを説明する概念である。[6] 最近我々はモデル系の考察により、熱力学カップリングの特徴として、coupling過程 が coupled過程の駆動力の形成に直接関与していることと coupled過程の進行が coupling過程の散逸関数に影響を与えることを報告した。[7] さらに最近、それらの特徴が我々の考える熱力学カップリングに一般的であるのかどうか調べるため、薬物の作用を生理的応答に連関させる薬物受容体系に応用したところ、上の二つの特徴の他にもう一つの特徴を得た。[8] すなわち、従来の線形の非平衡熱力学で coupling過程と coupled過程との結合に用いられていた交差的な現象論係数 $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$ が使われなかった。これらの特徴が熱力学カップリングの研究対象となる他の現象にも共通に現れるのかどうか、他の多くの具体例に応用することにより確かめなければならない。

本論文では、自由対流を熱力学カップリングのある系として考察した。まず最初に対流の基本式の一つ、逆温度勾配と重力の作用する流体の Navier-Stokesの方程式をここでの取り扱いに適するよう修正した。次にここでの系の coupling過程と coupled過程を設定した。以上の準備の後、自由対流を流体力学平衡の破れた静止流体系と Bénard 対流とに分けて考察し、それぞれの場合について非平衡熱力学的な取り扱いをした。すなわち、それぞれの coupling過程と coupled過程のための駆動力を定義し、それぞれに対応する現象論式を仮定することによって散逸関数を定式化した。結論として、熱力学カップリングの対象となる Bénard 対流の場合にも、モデル系[7] と前報[8] から得た熱力学カップリングの特徴を明らかに備えていることがわかった。

2. 対流系の基本式 [9]

ここでは凝縮系の対流だけを考えるので、流体は非圧縮性として取り扱う。そのような流体が対流 u を生じているときの熱輸送の式は次のように与えられる。

$$\rho\ \partial q/\partial t + \rho u\cdot \mathrm{grad}\ q = \lambda\ \nabla^2 T + (\eta/2)(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)^2. \qquad (2.1)$$

ここで ρ, q, u, λ, T, η はそれぞれ密度、単位質量あたりの熱量、流速、熱伝導係数、温度、粘性係数を表しており、u_i と u_k はそれぞれ対流 u の x_i 成分と x_k 成分を表し

ている。静止状態ではこの式は熱伝導に関する Fourierの式になる。すなわち

$$\rho\ \partial q/\partial t = \lambda\ \nabla^2 T. \tag{2.2}$$

また逆温度勾配のある重力場中の流体の運動を記述する Navier-Stokesの方程式は次のように与えられる。

$$\rho\ \partial u/\partial t + \rho(u \cdot \mathrm{grad})u = -\ \mathrm{grad}\ P' + \eta\ \nabla^2 u - \langle\rho\rangle \alpha T' g. \tag{2.3}$$

ここで P', T', g はそれぞれ逆温度勾配によって生じる圧力変化、温度変化、重力加速度を表している。$\langle\rho\rangle$ と α はそれぞれ平均密度と熱膨張係数を表し、次のように定義される。

$$\alpha = -\ \langle\rho\rangle^{-1}(\partial\rho/\partial T)_P. \tag{2.4}$$

流体が遅い定常流れであれば、(2.3) の左辺の慣性項は無視できるので次を得る。

$$\mathrm{grad}\ P' - \eta\ \nabla^2 u + \langle\rho\rangle \alpha T' g = 0. \tag{2.5}$$

そして最後の基本式は連続の式である。すなわち

$$\partial\rho/\partial t + \mathrm{div}(\rho u) = 0. \tag{2.6}$$

以上、３つの式 (2.1), (2.3), (2.6) をまとめて対流の方程式と呼ぶ。

自由対流系を熱力学カップリングのある系として取り扱うには、逆温度勾配あるいは鉛直上方向への熱伝導が流体力学平衡を乱すことから考察を始めなければならない。このために自由対流を、流体力学平衡は破れているが特徴的な流速を示さない状態（このような状態をここでは静止対流と呼んでおく）といわゆる Bénard 対流とに分けて考えることにする。まず最初に、基本となる Navier-Stokes の方程式 (2.3) をここでの取り扱いに適するように変形する。

重力場中における Navier-Stokes の方程式は次のように与えられる。

$$\rho\ \partial u/\partial t + \rho(u\cdot \mathrm{grad})u = -\ \mathrm{grad}\ P + \eta\ \nabla^2 u + \rho g. \tag{2.7}$$

静止流体に対してはこの式は次の流体力学平衡の式を与える。

$$\mathrm{grad}\ P - \rho g = 0. \tag{2.8}$$

ところで（2.7）のズリ粘性項は次のように表すこともできる。

$$\eta\ \nabla^2 u = \eta\ \mathrm{grad}(\partial u_i/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_i)$$

$$= \mathrm{grad}\ \tau_{ik}. \tag{2.9}$$

ここで τ_{ik} は粘性応力テンソルを表し、応力テンソル σ_{ik} の非対角成分である。応力テンソルは一般にはクロネッカーデルタ δ_{ik} を用いて次のように表すことができる。

$$\sigma_{ik} = -\ P\ \delta_{ik} + \tau_{ik}. \tag{2.10}$$

これを用いれば（2.7）は簡単に次のように表すことができる。

$$\rho\ \partial u/\partial t + \rho(u\cdot \mathrm{grad})u = \mathrm{grad}\ \sigma_{ik} + \rho g. \tag{2.11}$$

以下の議論ではいつでも遅い定常流れあるいは静止流体を扱うので、(2.11) を次のように表しておく。

$$\mathrm{grad}\ \sigma_{ik} + \rho g = 0. \tag{2.12}$$

(2.3) を導出するのとほとんど同じ方法を用いて、[9] (2.12) を逆温度勾配のある場合に拡張する。鉛直上方向 z に沿った次のような逆温度勾配 β_z を考える。

$$\beta_z = (\partial T/\partial z)_{x,y} < 0. \tag{2.13}$$

β_z が一定で $z = z_0$ における温度を T_0 とおけば、流体中の任意の高さ z における温度は次のように表すことができる。

$$T(z) = T_0 + \beta_z(z - z_0). \tag{2.14}$$

ここで位置 z_0 は、流体が下部熱源と接している位置である。自由対流系にとって本質的に重要なのは逆温度勾配によって生じる不安定な密度勾配なので、ここで熱膨張係数 α を用いて密度差を次のように表す。

$$\Delta\rho(z) = \langle\rho\rangle\alpha\beta_z(z - z_0). \tag{2.15}$$

この密度差によって流体内に生じる応力テンソルの変化を $\delta\sigma_{ik}$ で表せば、(2.12) は流体力学平衡の破れた形として次のように表すことができる。

$$\mathrm{grad}\,\delta\sigma_{ik} + \langle\rho\rangle\alpha\beta_z\, g(z - z_0) = 0. \tag{2.16}$$

応力テンソル σ_{ik} の変化は外場に対する流体系の応答として生じるので、このとき流体内には粘性応力テンソルが生じる。この (2.16) が我々がこれから用いる基本式であるがここではまだ静止対流と Bénard 対流とを区別することはできない。(2.16) は通常、自由対流を記述する運動方程式として理解され、[9,10] (2.5) に対応している。静止対流は Bénard 対流のような特徴的な流速 u を持たないが、流体力学平衡の破れによって生じる局所的な流速の効果が粘性応力テンソル τ_{ik} として現れていると考えることができる。一方、Bénard対流によるエネルギー散逸も同じように粘性応力テンソルによって生じると考えられる。このような、粘性応力に関して共通性をもつ異なる対流形式を区別して定式化することも本論文の目的の一つである。

3．自由対流系における Coupling過程と Coupled過程

定義により、coupling過程にはそれ自身で自発的に進む過程を、coupled過程には進まない過程を選ぶことができる。逆温度勾配のある流体系ではその温度勾配に共役な熱伝導を coupling過程とすることができる。静止流体では熱伝導は coupling過程というよりもむしろ単なる不可逆過程であるが、この場合、不可逆過程の局所形式は大域形式と一致す

る。すなわち、流体内の局所領域で生じている熱伝導は、大域的な流体全体で生じている熱伝導と等価である。対流問題では、系の局所的性質と大域的性質とを分けて考えることが本質的に重要である。このことは、対流の始まりによって系の記述法をいわゆる Euler 微分 $\partial/\partial t$ から流体力学微分あるいは Laglange微分 D/Dt に移行させなければならないところに顕著に現れている。[4,5,11] 対流の始まりは、coupling過程としての熱伝導の役割りを静止状態の場合とはまったく違ったものにする。すなわち、対流状態における熱伝導は局所的には流体内の至るところで生じているであろうが、対流運動に寄与するのは主として上部と下部の熱源に接しながら水平運動する流体部分の熱伝導である。そして、そのような部分流体中の温度勾配は循環的な対流運動に沿って振動的な様相を示すことが予想される。これはまさに coupled過程が coupling過程に与える影響である。

一方、対流系における coupled過程には特徴的流速をもつ対流運動それ自身 u を選ぶことができる。本論文での観点からは、対流運動は熱力学カップリングによって生じるということができる。しかし、対流が逆温度勾配によって駆動されるという意味では、静止対流も Bénard 対流も同じように coupled過程である。本論文では静止対流と Bénard 対流のどちらについても非平衡熱力学的な定式化を行うが、静止対流は coupled過程を含まないような従来の線形の非平衡熱力学の方法で記述できる。すなわち、熱力学カップリング的な記述法を必要とするのは Bénard 対流であることが示される。

4．流体力学平衡の破れた静止対流

静止対流は Bénard 対流のような特徴的な流速 u をもたないが、局所的には流体力学平衡が破れることによって生じる流れである。このような局所的流れも巨視的記述が可能であろう。流体力学平衡の破れた流体内の至るところで生じている局所流れを平均値として $\hat{u}$ で表せば、静止対流に対する Navier-Stokes の方程式は次のように与えることができる。

$$\rho\ \partial\hat{u}/\partial t + \rho(\hat{u}\cdot \mathrm{grad})\hat{u} = -\ \mathrm{grad}\ P + \eta\ \nabla^2\hat{u} + \rho g. \tag{4.1}$$

この右辺第二項は (2.9) と同様にして次のように表すことができる。

$$\eta\ \nabla^2\hat{u} = \eta\ \mathrm{grad}(\partial\hat{u}_i/\partial x_k + \partial\hat{u}_k/\partial x_i)$$

$$= \mathrm{grad}\ \langle \tau_{ik} \rangle. \tag{4.2}$$

ここで $\langle \tau_{ik} \rangle$ は局所流れによって生じる流体系全体にわたっての平均粘性応力テンソルである。(2.10) の応力テンソルに対しても平均値 $\langle \sigma_{ik} \rangle$ を用いて次を得る。

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = -\ P\ \delta_{ik} + \langle \tau_{ik} \rangle. \tag{4.3}$$

こうして (4.1) は次のように書き変えることができる。

$$\rho\ \partial \hat{u}/\partial t + \rho(\hat{u} \cdot \mathrm{grad})\hat{u} = \mathrm{grad}\ \langle \sigma_{ik} \rangle + \rho g. \tag{4.4}$$

定常的な遅い静止対流ではこの式は次のように簡単になる。

$$\mathrm{grad}\ \langle \sigma_{ik} \rangle + \rho g = 0. \tag{4.5}$$

この式を逆温度勾配 β_Z のある系に適用すれば、(2.16) に対応させて次を得る。

$$\mathrm{grad}\ \langle \delta\sigma_{ik} \rangle + \langle \rho \rangle \alpha \beta_Z\ g(z - z_0) = 0. \tag{4.6}$$

この式の解釈には注意を要する。すなわち、左辺第一項の中の粘性項は局所流れによって生じる応力テンソルの勾配を表す局所量であるのに対し、第二項の密度差による外部力は空間領域 $(z - z_0)$ を局所から大域まで任意にとることができる。ここでは詳しく扱わないが、この外部力の項は温度勾配 β_Z を変化させるかまたは系のサイズ $(z - z_0)$ を変化させることによって流体系を不安定化に導くことができる。我々の興味は空間パターンを示すいわゆる Bénard 不安定性にあるが、これは主に系のサイズを変化させることに関係している。 ここで得た静止対流の基本式 (4.6) に従って、静止対流の非平衡熱力学的な定式化を進める。

静止対流のための Navier-Stokes の方程式 (4.6) に基づいて静止対流の非平衡熱力学的定式化を進めるには、まず現象論式を与えなければならない。この系には次のように記述できる熱伝導流束 J_{th} が生じている。

$$J_{th} = -\lambda\ (\partial T/\partial z). \tag{4.7}$$

さらにこの系には流体力学平衡が破れたことによって、次のような運動量流束 $J_{\hat{u}}$ も生じている。

$$J_{\hat{u}} = \langle \tau_{ik} \rangle = -\eta(\partial \hat{u}_i/\partial x_k - \partial \hat{u}_k/\partial x_i). \tag{4.8}$$

これら線形現象論式にとって、逆温度勾配のある系では熱伝導は自発的で独立な過程であるが、運動量流束は従属的な過程である。このときの因果関係は、逆温度勾配が流体力学平衡を破ることによって流体内に局所的な流速勾配を生じさせることである。我々はこの因果関係を次のような現象論的関係で表しておく。

$$(\partial \hat{u}_i/\partial x_k + \partial \hat{u}_k/\partial x_i) = \kappa_{21}\ (\partial T/\partial z), \quad (\kappa_{21} > 0). \tag{4.9}$$

ここで κ_{21} は温度勾配を流速勾配に結合させるカップリング係数で、その詳しい形は次のように求めることができる。(4.6) の左辺第一項の中の粘性応力テンソル $\langle \tau_{ik} \rangle$ に注目すると、次の形を得る。

$$\mathrm{grad}\ \langle \delta\tau_{ik} \rangle = -\langle \rho \rangle \alpha g(z - z_0) \cdot \beta_z. \tag{4.10}$$

応力テンソルの変化 $\delta\tau_{ik}$ は、外部力としての温度差あるいは密度差に対する応答として $0 \to \langle \tau_{ik} \rangle$ のように生じたものと考えることができる。さらに静止対流系では局所流れ $\hat{u}$ は局所的な平均距離 $\langle \delta z \rangle$ の範囲内で減衰することが予想される。(4.10) の両辺にそのような平均距離を掛ける（厳密には積分する）ことにより次を得る。

$$\langle \tau_{ik} \rangle = -\langle \rho \rangle \alpha g(z - z_0) \langle \delta z \rangle \cdot \beta_z. \tag{4.11}$$

(4.2) と (4.8) を考慮すれば、(4.9) のカップリング係数は次のように表すことができる。

$$\kappa_{21} \equiv -\eta^{-1} \langle \rho \rangle \alpha g(z - z_0) \langle \delta z \rangle. \tag{4.12}$$

(4.11) の形は、係数 κ_{21} がいわゆる熱力学的力の変換係数となっていることを表している。

因果関係 (4.9) を考慮すれば、(4.7) と (4.8) に対して次のような現象論式の組を得る。

$$\left.\begin{aligned} J_{th} &= -\lambda\,(\partial T/\partial z) \\ J_{\hat{u}} &= -\eta\kappa_{21}\,(\partial T/\partial z) \end{aligned}\right\}. \tag{4.13}$$

この記述法は、交差的な現象論係数 $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha\neq\beta)$ を用いる従来の線形の非平衡熱力学の方法とは違っているが、その物理的意味にも違いがあるのかどうかここでは延べない。このことは、別稿において熱力学カップリングの一般化の際に詳細に取り扱われるであろう。以上より、静止対流系の散逸関数を定式化する。(4.13) の各過程に対する散逸関数はそれぞれ次のように与えることができよう。

$$\phi_{th} = -J_{th}\,(\partial T/\partial z) = \lambda\,(\partial T/\partial z)^2 \geqq 0, \tag{4.14}$$

$$\phi_{\hat{u}} = -J_{\hat{u}}\,(\partial\hat{u}_i/\partial x_k + \partial\hat{u}_k/\partial x_i) = \eta\kappa_{21}{}^2\,(\partial T/\partial z)^2 \geqq 0. \tag{4.15}$$

これらより静止対流系の全散逸関数 Φ_0 は次のように与えることができる。

$$\Phi_0 = \phi_{th} + \phi_{\hat{u}} = (\lambda + \eta\kappa_{21}{}^2)(\partial T/\partial z)^2 \geqq 0. \tag{4.16}$$

一般には静止対流系は熱伝導が支配的な単なる静止非平衡系として取り扱われるので、次のような静止流体の熱伝導係数 λ' を導入することができる。

$$\lambda' \equiv \lambda + \eta\kappa_{21}{}^2. \tag{4.17}$$

これを用いれば、静止対流系の現象論式と散逸関数はそれぞれ次のような簡単な形で与えることができる。

$$J_{th}' = -\lambda'(\partial T/\partial z), \tag{4.18}$$

$$\phi_{th}' = \lambda'(\partial T/\partial z)^2 \geqq 0. \tag{4.19}$$

このように静止対流を静止流体として扱う立場では、特に対流の効果を考慮する必要はないので取り扱いは簡単である。また熱力学カップリングも考慮する必要はない。しかし、ここで得られた結果は興味深い。すなわち、同じ静止流体系であってもその熱伝導係数は温度勾配の方向によって一般に異なる可能性があり、(4.17) より次の関係を得る。

$$\lambda' > \lambda. \tag{4.20}$$

我々の知る限り、この関係はこれまでに得られていなかったものであり、実験的に確認する必要があろう。

熱力学カップリングが本質的に重要になるのは、静止対流 $\hat{u}$ が Bénard 対流 u に成長する大域的不安定性の起こる場合である。そのような取り扱いを次の項で行う。

5. Bénard 対流と熱力学カップリング

静止対流の式 (4.6) は、 外部力とそれによって流体内に生じる応力テンソルとがつり合い状態にあることを示している。空間パターンを示す Bénard 対流のような自由対流は (4.6) のつり合いが破れることによって生じるものと考えることができる。ここでは最初に Bénard 対流 u の駆動力を定義するが、注意しなければならないのは流れ u が可逆的な様相をもつ力学過程であるという点である。 流れ u は一般には巨視的物体の運動として考えることができるが、このような運動がすべて不可逆的であることは経験的事実である。すなわち、巨視的物体の運動は種々の摩擦のために自然に静止する傾向をもつが、これは力学過程における熱力学第二法則の現れに他ならない。

Bénard 対流の駆動力は静止対流の式 (4.6) における左辺第二項の外部力によって表すことができるが、第一項の粘性によるエネルギー散逸は Bénard 対流の出現を妨げる効果をもつので、実質的な駆動力 F_u は次のように定義することができる。

$$F_u = \langle\rho\rangle\alpha\beta_z\ g(z - z_0) + \mathrm{grad}\ \langle\delta\sigma_{ik}\rangle. \tag{5.1}$$

この駆動力は力学的力の密度の次元をもち、Glansdorff-Prigogine 流には一般化された熱力学的力に、[3] Abiko-Kitahara 流には熱力学的流れに、[4] 一柳・西島流には湧き出し量に対応している。[5] これらの違いは対流に対するそれぞれの解釈の違いから生じるものといえるが、ここでは単に Bénard 対流 u の駆動力としてだけ解釈しておく。(5.1) は coupling過程の駆動力 β_z が coupled過程 u の駆動力 F_u をつくりだしていることを表している。これは、我々の考える熱力学カップリングの特徴の一つである。

ところで、力学的力を駆動力とする流れの散逸関数の原形は次のように与えることができる。

$$\phi_u = F_u \cdot u \geq 0. \tag{5.2}$$

ここで Bénard 対流 u のための現象論式を次のように仮定する。

$$u = K_{22} F_u. \tag{5.3}$$

ここで K_{22} は通常の解釈に従って現象論係数を表すが、この式は粘性流体中をゆっくりと運動する物体に作用する力に関する Stokes の法則[9] からの類似として導入した。そのような類似からは係数 K_{22} は粘性係数 η の逆数に対応する量であり、いわゆる抵抗係数に対応している。この場合、u と F_u はそれぞれ熱力学的力と流れに分類されることになるが、このことはここでは本質的な重要性をもたない。 Bénard 対流系における熱力学カップリングの機構は (5.1) に表されているが、しかし、coupled過程の駆動力 F_u をつくりだしているのは局所的な勾配 β_z というよりもむしろ大域的な温度差 ΔT_z である。すなわち、次のように表すことができる。

$$\Delta T_z = -\beta_z (z - z_0). \tag{5.4}$$

こうして (5.1) の駆動力は次のように書き変えることができる。

$$F_u = -\langle\rho\rangle\alpha g\, \Delta T_z + \mathrm{grad}\, \langle\delta\sigma_{ik}\rangle. \tag{5.5}$$

これを用いれば Bénard 対流系の散逸関数を次のように得ることができる。

$$\phi_u = K_{22}\ (-\langle\rho\rangle\alpha g\ \Delta T + \mathrm{grad}\ \langle\delta\sigma_{ik}\rangle)^2 \geq 0. \tag{5.6}$$

この式は静止対流と Bénard 対流における粘性の効果を違う形で含んでいる。すなわち、静止対流では $\langle\delta\sigma_{ik}\rangle$ における粘性が、 Bénard 対流では K_{22} における粘性が効果を表しているのである。対流系の熱力学的取扱いにおけるこうした粘性の区別はここでの研究が初めてと考えられる。次には、熱力学カップリングのもう一つの特徴である coupled過程の coupling過程に与える影響について調べる。

6．対流系における Coupled過程の Coupling過程に与える影響

空間パターンを生じている Bénard 対流系では、局所的な温度勾配 β は運動している流体の位置 r と共に変化する。この勾配 β = grad T を coupling過程（熱伝導）の駆動力として次のように表す。

$$X_{th} = -\ \beta. \tag{6.1}$$

対流運動に沿ってのこの駆動力 X_{th} の時間変化は、一般に流体力学微分によって表すことができる。[11)]

$$D\ X_{th}/Dt = \partial X_{th}/\partial t + u \cdot \mathrm{grad}\ X_{th}. \tag{6.2}$$

ここでの目的は、対流 u の熱伝導 J_{th} に与える影響を調べることである。 このために一つの対流セルに注目すると、循環運動する流体中の局所的な駆動力 X_{th} は振動的な変化を示すであろう。この変化を単振動の式

$$A = A_0 \cos \omega t \tag{6.3}$$

を用いて近似すると、温度差 ΔT において対流がないとしたときの駆動力を $X_{th}{}^0$ とおいて次のように表すことができる。

$$X_{th}(R;\ r,t) = X_{th}{}^0 + X_{th}(R,\ \Delta T)_0 \cos \omega t. \tag{6.4}$$

ここで R は流体の断面における循環運動の半径を表す変数パラメータで、$R_0 = 0$ の中心位置から最大半径 R_m まで任意の値をとることができる。また r と t はそれぞれ流体中の位置と時刻を表している。最大振幅 A_0 に対応する量 $X_{th}(R, \Delta T)_0$ は、変数パラメータ R と上下熱源間の温度差 ΔT の関数である。この最大駆動力は、流体が下部（または上部）から上昇（または下降）し上部（または下部）に達したときに生じるものと考えられる。さらに角速度 ω は対流速度 u に対応している。最大駆動力と角速度は温度差 ΔT によって変化するが、その変動の範囲は限られている。なぜなら、流体系は温度差が小さいときには静止状態にあり、大きいときには乱流状態になるからである。

今や coupled過程の coupling過程に与える影響は明らかである。すなわち、対流 u の始まりによって流体系全体の平均的な熱伝導のための駆動力 $\langle X_{th}\rangle$ は、静止系における値 $X_{th}{}^0$ よりも増大するであろう。角速度 ω の対流によって増加する分の平均駆動力を $\langle X_{th}\rangle_\omega$ のように表せば $\langle X_{th}\rangle$ は次のように表すことができる。

$$\langle X_{th}\rangle = X_{th}{}^0 + \langle X_{th}\rangle_\omega. \tag{6.5}$$

これを用いれば平均熱伝導 $\langle J_{th}\rangle$ は、平均熱伝導係数を $\langle\lambda'\rangle$ として次のように表すことができる。

$$\langle J_{th}\rangle = \langle\lambda'\rangle\,(X_{th}{}^0 + \langle X_{th}\rangle_\omega). \tag{6.6}$$

この式は Bénard 対流系における熱伝導流束を表しており、$\langle X_{th}\rangle_\omega$ が対流項を表している。 また coupled過程は coupling過程によって駆動される一方で、(6.6) 式のように逆に coupled過程（対流項に対応）が coupling過程（熱伝導流束に対応）に影響を与えていることがわかる。これが、我々の考える熱力学カップリングのもう一つの特徴である。

現象論式 (6.6) より、(4.19) に対応づけて Bénard 対流系における熱伝導による散逸関数を次のように与えることができる。

$$\langle\phi_{th}'\rangle = \langle\lambda'\rangle\,(X_{th}{}^0 + \langle X_{th}\rangle_\omega)^2 \geqq 0. \tag{6.7}$$

こうして Bénard 対流系における全散逸関数 Φ_ω は、(5.6) と (6.7) の和によって与えることができる。

$$\Phi_\omega = \langle \phi_{th}' \rangle + \phi_u$$

$$= \langle \lambda' \rangle \ (X_{th}{}^{0} + \langle X_{th} \rangle_\omega)^2 + K_{22} \ (-\langle \rho \rangle \alpha g \ \Delta T + \mathrm{grad} \ \langle \delta \sigma_{ik} \rangle)^2 \geq 0. \quad (6.8)$$

この式の特徴は、全散逸関数に対する熱伝導の効果と対流の効果とが独立でなく、特に右辺第一項の熱伝導項が対流の影響を $\langle X_{th} \rangle_\omega$ として含んでいるところにある。さらに、不可逆過程間のカップリング現象であると考えられるにもかかわらず、従来におけるような交差的な現象論係数 $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ が使われていないところにも特徴がある。

7. まとめ

自由対流系における熱輸送と対流運動はそれぞれ熱輸送の方程式と Navier-Stokes の方程式で記述することができる。しかし、対流現象の記述の難しさはむしろ熱伝導と対流運動とのカップリングにあると言ってよいだろう。最初に述べたように、これは空間パターンの生成原理とともに対流系におけるもう一つの重要な問題である。本論文では、この問題を熱力学カップリングのある系の問題として扱った。

我々の考える熱力学カップリングの特徴として、1．coupling過程が coupled過程のための駆動力を形成する、2．coupled過程が coupling過程の散逸関数に影響を与えることをすでに得ているが、[7] これらの特徴はここで扱った対流系にも見ることができた。さらにもう一つの特徴として、ここでのカップリング関係を記述するのに 3．従来の交差的な現象論係数 $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ が使われなかったことを上げることができる。 これはすでに得ている特徴であり、[8] 我々の考える熱力学カップリングによる方法と従来の線形の非平衡熱力学における方法との大きな違いであるが、さらに検討を必要とする。ここでの方法が一般的なものかどうか簡単に結論することはできないが、さらに多くの系に応用することによって熱力学カップリングの特徴とその一般的様相とが明らかになるであろう。

参考文献

1) S.Chandrasekhar: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, (Dover, New York, 1981).

2) L.E.Reichl: A Modern Course in Statistical Physics, (Texas Univ. Press, 1980) [鈴木増雄 監訳： 現代統計物理　下，(丸善，1984)].

3) P.Glansdorff and I.Prigogine: Thermodynamic Theory of Structure, Stability

and Fluctuations, (Wiley-Interscience, London, 1971).

4) S.Abiko and K.Kitahara: J. Phys. Soc. Japan, 56 (1987) 2332.

5) 一柳正和, 西島国介: 物性研究, 50 (1988) 694.

6) 高山光男: 物性研究, 49 (1988) 427.

7) 高山光男: 物性研究, 51 (1989) 354.

8) 高山光男: 物性研究, 52 No.3 (1989)掲載予定.

9) ランダウ-リフシッツ著, 竹内均 訳: 流体力学 1, (東京図書, 1981).

10) R.B.Bird, W.E.Stewart and E.N.Lightfoot: Transport Phenomena, (John Wiley & Sons, New York, 1960) 299.

11) 高山光男: 物性研究, 41 (1984) 421.